TROMPO DE LAGRANGE:

PEONZA SIMÉTRICA PESADA CON UN PUNTO FIJO.

MECÁNICA Y ONDAS I

Alejandro José Florido Tomé.

8 de enero de 2021

1. Introducción…………….…………..…...pág 2

2. Movimiento de una peonza simétrica pesada
con un punto fijo………….……….….…pág 2-4
2.1. Ángulos de Euler………………..pág 3-4

3. Lagrangiano….……………………….…pág 5-7
3.1. Energía cinética……..……...…pág 5-7
3.2. Energía potencial…….………..pág 7

4. Ecuaciones del movimiento…..………pág 8-9

5. Potencial efectivo……………………..pág 9-11

6. Velocidad angular de precesión…….pág 11-14

7. Conclusión……………………...……pág 14-15

8. Bibliografía…………………....……...pág 15

9. Mensaje……………………………….pág 15

1. Introducción.

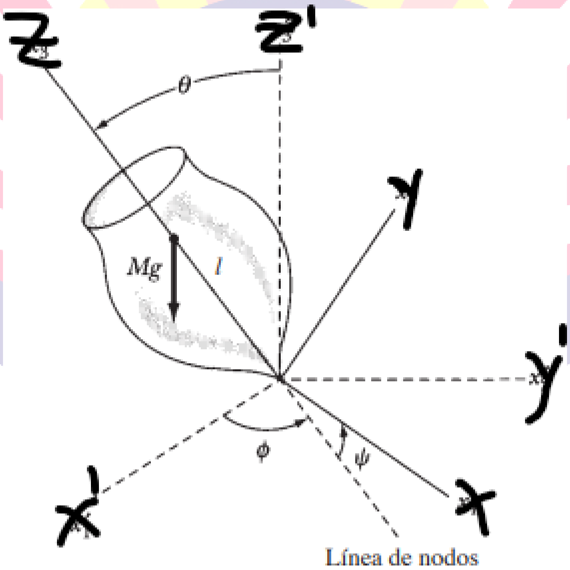
En este trabajo, como indica su nombre, nos vamos a centrar en el movimiento de una peonza simétrica, que se encuentra en presencia exclusivamente de la gravedad, y que tiene un punto fijo en el espacio, con el paso del tiempo.

Veremos, a partir de algunas consideraciones básicas y elementales principales, y con cálculos y demostraciones, los distintos tipos de movimiento que puede presentar la peonza, en función de encontrarnos en una situación u otra.

Pues, demos comienzo, al igual que hizo Lagrange en su momento, y por primera vez, en su libro denominado "Mechanical Analytique":

2. Movimiento de una peonza simétrica pesada con un punto fijo.

Supongamos una peonza que está libre de fuerzas, donde la única que vamos a tener en cuenta va a ser la gravedad, y que presenta un punto fijo sobre el que se apoya en el espacio, con el que limitaremos el movimiento de éste (si no hiciéramos esto, la peonza iría describiendo circunferencias en el espacio mientras fuese rodando e inclinándose, y deberíamos tener en cuenta 6 grados de libertad, cosa que veremos ahora que no hace falta).



A partir de la imagen 1, definimos los ejes x',y' y z' como los ejes fijos del espacio (que será el sistema de referencia inercial), y los ejes x, y, z como los ejes del cuerpo (que es un sistema de referencia no inercial ya que se irá moviendo aceleradamente respecto al sistema inercial). Vamos a tomar al eje z como eje de simetría, y respecto al cual la peonza irá rotando.

Podemos observar cómo los ejes x, y, z son los que nos orientan y definen como se mueve el trompo, que se encuentra apoyado en un punto fijo al que llamaremos origen 'O'.

También, definiremos la distancia entre el centro de masas del trompo y O como l.

Vamos a empezar a considerar distintas cosas a partir de lo ya mencionado:

- Para empezar, llamaremos al eje x del sistema del cuerpo como línea de nodos.

- Al tratarse de una peonza simétrica y sobre la que no actúan fuerzas externas (siempre sin tener en cuenta a la gravedad), podemos decir que habrá dos momentos de inercia iguales y unos distintos (el eje x corresponde con el subíndice 1, la y con el 2, y la z con el 3).

Como la peonza está apoyado sobre el eje z, el tensor de inercia asociado no variará, ya que, como este va rotando respecto a dicho eje, su distribución de masa no variará.

Por tanto, los momentos principales de inercia respecto a los ejes x e y serán iguales y distintos al del eje z:

$$(I_1 = I_2) \neq I_3$$

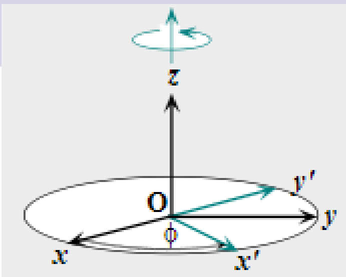
- Como sobre el cuerpo solo actúa la gravedad, vamos a tener en cuenta el peso de éste, que es respecto del centro de masas.
- Supondremos a la peonza como un cuerpo rígido, que, por definición, tienen 6 grados de libertad: tres de ellos son respecto a un punto de referencia (que suele ser el centro de masas), y otros tres que corresponden a tres ángulos asociados a tres distintos tipos de movimiento (spin, precesión y nutación).

En nuestro caso, como tenemos un punto fijo, lo usaremos como punto de referencia, lo que nos limita los grados de libertad a solo tres: los ángulos. Usaremos como coordenadas generalizadas los ángulos de Euler (ϕ, θ, Ψ).

2.1. Ángulos de Euler.

Vamos a definir quién va a ser cada ángulo de Euler, uno a uno, para que no quede ninguna duda (aquí denominaremos a los ejes distintos, solo para que corresponda lo que se representa en las imágenes con lo que digamos. Después, volveremos a tomar a los ejes xyz como los del cuerpo, y ejes x’y’z’ como los del sistema fijo.):

- ϕ: Corresponde con la primera rotación del sistema del cuerpo, que la haremos alrededor del eje z del sistema fijo:



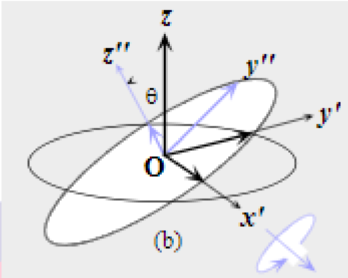
Aquí, variará el plano formado por los ejes x’y’ del cuerpo.

Definiremos **la línea de nodos**, que corresponderá con el eje x’ del cuerpo.

La matriz de esta rotación vendrá dada por:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\phi & sin\phi & 0 \\ -sin\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- θ: Será la segunda rotación que sufrirá el cuerpo, que la haremos respecto del eje x’:

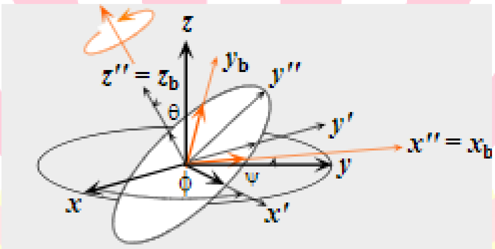


Esta rotación se define más correctamente como la rotación del cuerpo respecto de la línea de nodos, en la que varía el plano formado por los ejes y’’z’’ del cuerpo.

La matriz de esta rotación vendrá dada por:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sin\theta \\ 0 & -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

- Ψ: Tercera y última rotación, que será alrededor del eje z’’ (sistema cuerpo):



Donde se denominan a los ejes del cuerpo como x_b, y_b y z_b.

En esta última, irá variando el plano formado por $y_b z_b$.

La matriz de rotación de ésta última será:

$$\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\Psi & sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta todas estas consideraciones, vamos a empezar con los cálculos.

3. Lagrangiano.

Nuestro objetivo va a ser definir el movimiento del trompo. Para ello, necesitamos las ecuaciones de Lagrange-Euler, aunque, sabemos de antemano, que vamos a tener que calcular el lagrangiano L:

$$L = T - U$$

Donde T corresponde con la energía cinética del cuerpo, y U con la energía potencial.

Comencemos con el cálculo de la energía cinética:

3.1. Energía cinética.

Sabemos que la energía cinética vendrá dada, respecto del centro de masas, por una energía cinética tanto de rotación como de traslación, pero respecto del origen 'O' solo de rotación, ya que el sistema va a estar siempre apoyado en este punto fijo:

$$T = T^{CM}_{traslación} + T^{CM}_{rotación} = T^{0}_{rotación} = \frac{1}{2}\vec{\omega}(I)\vec{\omega}$$

Para empezar, ya vemos una clara sencillez en la resolución del problema si consideramos como punto de referencia el origen 'O', pasando de dos sumandos que nos podría plantear la energía cinética, a sólo uno.

Además, hemos tomado como eje de simetría el eje z del cuerpo, lo que nos va a permitir diagonalizar nuestro tensor de inercia. Los ejes que hemos tomados del cuerpo se les denominan <u>ejes principales de inercia</u>.

Veamos cómo se escribiría el tensor de inercia:

$$(I) = \begin{pmatrix} I^0_{xx} & I^0_{xy} & I^0_{xz} \\ I^0_{yx} & I^0_{yy} & I^0_{yz} \\ I^0_{zx} & I^0_{zy} & I^0_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^0_1 & 0 & 0 \\ 0 & I^0_2 & 0 \\ 0 & 0 & I^0_3 \end{pmatrix}$$

Donde I^0_1, I^0_2 y I^0_3 son los momentos de inercia del cuerpo en cada uno de sus ejes (el eje x corresponde con el subíndice 1, la y con el 2, y la z con el 3) respecto del punto fijo 0.

Teniendo en cuenta que $(I^0_1 = I^0_2 = I^{CM}_1 + ml^2) \neq (I^0_3 = I^{CM}_3)$, donde los momentos de inercia principales son constantes. (La segunda igualdad se cumple debido a que el trompo gira y se mueve respecto eje z del cuerpo), sabemos entonces que $T^0_{rotación}$ vendrá dada por:

$$T^0_{rotación} = \frac{1}{2}I^0_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I^0_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I^0_3\omega_3^2 = \frac{1}{2}[I^0_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + I^0_3\omega_3^2]$$

Vale, sabemos que los momentos de inercia son constantes, pero ¿cómo están definidas las velocidades angulares?

Por ello estuvimos definiendo los ángulos de Euler y sus matrices de rotación, para poder hallar a estas incógnitas que se nos acaban de presentar.

Sea la velocidad angular la suma de cada velocidad angular de cada eje que denominaremos, respecto al sistema fijo, y que tendremos que transformarlas una a una para obtenerlas respecto al sistema del cuerpo. Sea:

$$\omega' = \dot{\phi}\widehat{k'} + \dot{\theta}\hat{n} + \dot{\Psi}\hat{k}$$

Donde tenemos las velocidades angulares en función de los ángulos de Euler, pero cada una con el eje respectivo al que rotan. Es decir, ϕ suponía una rotación respecto del eje z' del sistema fijo ($\widehat{k'}$ es el vector unitario en la dirección del eje z'); θ una rotación respecto de la línea de nodos ($\hat{n}$ es el vector unitario en la dirección de la línea de nodos); y Ψ una rotación respecto del eje z del cuerpo ($\hat{k}$ es el vector unitario en la dirección del eje z).

Vamos a tener que transformar, para empezar, la componente $\widehat{k'}$ al sistema del cuerpo, en función del eje 'z' de este y, para ello, vamos a tener que aplicar a la componente $\dot{\phi}$ las tres rotaciones mencionadas antes, y aplicándolas una a una, desde la primera. Denominaremos ω_ϕ al vector resultante de aplicarla a la componente mencionada las siguientes rotaciones:

$$\omega_\phi = \begin{pmatrix} cos\Psi & sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sin\theta \\ 0 & -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\phi & sin\phi & 0 \\ -sin\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi}sin\theta\sin\Psi \\ \dot{\phi}sin\theta\cos\Psi \\ \dot{\phi}cos\theta \end{pmatrix}$$

A continuación, tendremos que transformar a la componente $\dot{\theta}\hat{n}$, aunque en sí el vector $\hat{n}$ se encuentra en la línea de nodos, por lo que el cuerpo ya ha sufrido dos rotaciones, lo que implica que solo le falta una rotación para estar completamente rotado. Denominaremos ω_θ al vector resultante de aplicarla la rotación a la componente mencionada:

$$\omega_\theta = \begin{pmatrix} cos\Psi & sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\Psi \\ -\dot{\theta}\sin\Psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por último, tenemos la componente $\dot{\Psi}\hat{k}$, que ya se encuentra en el eje z del cuerpo, por lo que ya ha sufrido las tres rotaciones y no habrá que hacerle nada, al que denominaremos ω_Ψ:

$$\omega_\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi} \end{pmatrix}$$

Por lo que ya podemos escribir las tres componentes de la velocidad angular en función de los ángulos de Euler, que serán lo correspondiente a cada eje:

$$\omega = \omega_\phi + \omega_\theta + \omega_\Psi = \begin{pmatrix} \dot{\phi}sin\theta\sin\Psi + \dot{\theta}\cos\Psi \\ \dot{\phi}sin\theta\cos\Psi - \dot{\theta}\sin\Psi \\ \dot{\phi}cos\theta + \dot{\Psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Ya conociendo quienes son las velocidades angulares para poder hallar a la energía cinética, vamos a hacer el primero cálculo que se nos presenta, que es:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \left(\dot{\phi}sin\theta\sin\Psi + \dot{\theta}\cos\Psi\right)^2 + \left(\dot{\phi}sin\theta\cos\Psi - \dot{\theta}\sin\Psi\right)^2 =$$

$$= \dot{\phi}^2\sin^2\theta\sin^2\Psi + \dot{\theta}^2\cos^2\Psi + \cancel{2\dot{\phi}sin\theta\sin\Psi\dot{\theta}\cos\Psi} + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\cos^2\Psi + \dot{\theta}^2\sin^2\Psi - \cancel{2\dot{\phi}sin\theta\cos\Psi\dot{\theta}\sin\Psi}$$

Podemos ver como los dos términos tachados son iguales, pero de signo contrario, por eso se van. Vamos a sacar factor común y a usar las propiedades del seno y coseno:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \dot{\phi}^2\sin^2\theta\,(\sin^2\Psi + \cos^2\Psi) + \dot{\theta}^2(\cos^2\Psi + \sin^2\Psi) = \dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2$$

Ya podemos sustituir en la energía cinética todo lo que sabemos:

$$T^0_{rotación} = \frac{1}{2}[I^0_1(\omega_1^2+\omega_2^2)+I^0_3\omega_3^2] = \left[\!\left[\frac{1}{2}\left[I^0_1\left(\dot{\phi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2\right)+I^0_3\left(\dot{\phi}cos\theta+\dot{\Psi}\right)^2\right]=T\right]\!\right]$$

Por lo que ya tenemos la energía cinética en función de las coordenadas y velocidades generalizadas.

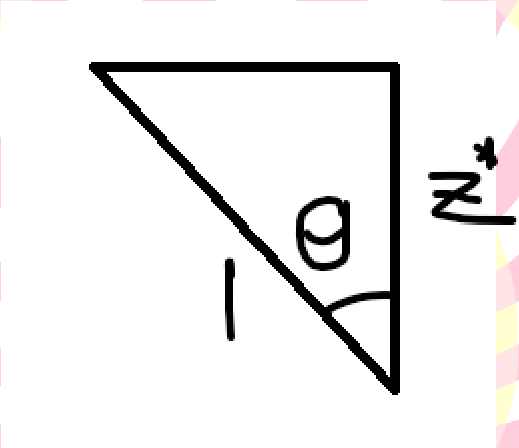
Ahora nos falta por calcular la energía potencial U:

3.2. Energía potencial.

Sabemos que la única fuerza externa que actúa sobre el cuerpo es la gravedad, por lo que el trompo tendrá un peso asociado, y esa será la energía potencial. Además, según nuestra elección de los ejes del cuerpo, ese peso se encontrará en la dirección del eje z:

$$U = mgz*$$

Donde 'z*' corresponde con la altura a la que se encuentra el centro de masas respecto del origen en el eje z, pero aquí falta algo, ¿verdad? No encontramos ninguna dependencia con alguno de los ángulos de Euler, por lo vamos a ver si hay alguna relación entre alguno de ellos y la altura 'z*'. Veamos en un dibujo quién sería z*:



Donde l recordemos que es la longitud del origen al centro de masas. De aquí podemos sacar la siguiente relación:

$$cos\theta = \frac{z*}{l}$$

Despejando:

$$z* = l cos\theta$$

Sustituyendo en la expresión de la energía potencial, obtenemos:

$$[\![U = mgl cos\theta]\!]$$

Y ya lo tenemos en función del ángulo de Euler θ.

Con la energía cinética y potencial ya calculadas, el siguiente paso es obtener el lagrangiano:

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left[I^0_1\left(\dot{\phi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2\right)+I^0_3\left(\dot{\phi}cos\theta+\dot{\Psi}\right)^2\right] - mgl cos\theta$$

4. Ecuaciones del movimiento.

Con el lagrangiano ya obtenido, podemos plantearnos empezar a calcular la ecuación de movimiento para cada uno de los ángulos de Euler, donde, esta ecuación viene dada por la siguiente expresión (de forma general en función de las coordenadas generalizas q_j):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

Irá igualada a cero porque, recordemos que no hay ninguna fuerza que actúe sobre el cuerpo, por lo que no habrá ninguna fuerza generalizada.

Esta ecuación habrá que usarla para los tres ángulos de Euler, pero a simple vista se ve una cosa bastante curiosa si queremos empezar a sustituir. Se puede apreciar como aparecen $\dot{\phi}$ y $\dot{\Psi}$, aparte de θ y $\dot{\theta}$. Es decir, que no aparecen ni ϕ ni Ψ en el lagrangiano, por lo que a estas coordenadas se les conocen con el nombre de cíclicas. Por lo que veamos qué pasa si sustituimos en la ecuación del movimiento de alguna de estas dos (la aplicaremos a Ψ, aunque todo el razonamiento será igual de válido para ϕ):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \Psi}=0=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}}\right)$$

Para que una derivada temporal de nula, lo que haya dentro tiene que ser una constante con el transcurro del tiempo, que lo llamaremos como momento conjugado de $\dot{\Psi}$ (p_Ψ):

$$p_\Psi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}}=\frac{1}{2}\left[2I_3^0(\dot{\phi}cos\theta+\dot{\Psi})\right]=I_3^0\left(\dot{\phi}cos\theta+\dot{\Psi}\right)=constante=L_z$$

Lo que nos quiere decir es que no hay un momento de fuerza en el eje z del sistema del cuerpo, cosa que es lógica, ya que es el eje de simetría de rotación del ángulo ϕ.

Haciendo lo mismo, obtenemos también el momento conjugado de $\dot{\phi}$ (p_ϕ):

$$p_\phi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}=\frac{1}{2}\left[I_1^0\left(2\dot{\phi}\sin^2\theta\right)+2I_3^0\left(\dot{\phi}cos\theta+\dot{\Psi}\right)\right]=I_1^0\left(\dot{\phi}\sin^2\theta\right)+I_3^0\left(\dot{\phi}cos\theta+\dot{\Psi}\right)cos\theta$$
$$=I_1^0\left(\dot{\phi}\sin^2\theta\right)+L_z cos\theta=constante=L_{z'}$$

Igual que antes, obtenemos que el momento de fuerza en el eje z' del sistema fijo es contante.

Deducimos dos cosas: la primera, que la única torsión que se presentará ocurrirá en la dirección de la línea de nodos; la segunda, observemos como uno de los sumandos de $L_{z'}$ es L_z, un resultado lógico ya que nos quiere decir que el momento que se presenta en el eje z se proyecta en el eje z'.

Con estas dos constantes del movimiento obtenidas, el problema equivalente se simplifica muchísimo, tanto que se podría decir que hemos pasado de un problema que, por ser un sólido rígido que debería presentar seis grados de libertad, a tres gracias a la presencia del punto fijo, y ahora al caso unidimensional gracias a éstas dos.

Nuestro objetivo, al ser un caso unidimensional, será calcular el potencial efectivo para hallar los máximos, mínimos y los puntos estables que presente.

Antes de zanjar este punto, vamos a obtener quiénes son $\dot{\phi}$ y $\dot{\Psi}$, despejando de las ecuaciones de arriba.

Despejando de la primera:

$$I_3^0(\dot{\phi}cos\theta + \dot{\Psi}) = L_z \rightarrow \dot{\phi}cos\theta + \dot{\Psi} = \frac{L_z}{I_3^0} \rightarrow \left[\!\left[\dot{\Psi} = \frac{L_z}{I_3^0} - \dot{\phi}cos\theta \right]\!\right]$$

Despejando de la segunda:

$$I_1^0(\dot{\phi}\sin^2\theta) + L_z cos\theta = L_{z'} \rightarrow I_1^0(\dot{\phi}\sin^2\theta) = L_{z'} - L_z cos\theta \rightarrow \left[\!\left[\dot{\phi} = \frac{L_{z'} - L_z cos\theta}{I_1^0 \sin^2\theta} \right]\!\right]$$

El resultado más importante es este último, que corresponde con la velocidad de precesión del trompo. Además, ambos resultados dependen de θ. Por lo que, si éste es constante, entonces, $\dot{\Psi}$ y $\dot{\phi}$ serán constantes, y el cono iría describiendo un cono en la vertical.

5. Potencial efectivo.

Podríamos usar la última ecuación de movimiento que nos queda para θ, aunque, sería un camino más costoso que el que vamos a usar: mediante energía (o incluso con el hamiltoniano, ya que en este caso el lagrangiano es cuadrático en las velocidades generalizadas). Como el trompo se encuentra en un sistema conservativo, sabemos que la energía será constante con el tiempo:

$$H = E_T = T + U = \frac{1}{2}\left[I_1^0(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + I_3^0(\dot{\phi}cos\theta + \dot{\Psi})^2\right] + mglcos\theta$$

Y aquí vamos a sustituir los valores calculados de $\dot{\Psi}$ y $\dot{\phi}$, para así tener una energía que solo dependa de θ y $\dot{\theta}$:

$$E_T = \frac{1}{2}I_1^0\sin^2\theta\left(\frac{L_{z'} - L_z cos\theta}{I_1^0\sin^2\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}I_1^0\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{I_3^0}{I_3^0}I_3^0(\dot{\phi}cos\theta + \dot{\Psi})^2 + mglcos\theta$$

Teniendo en cuenta la ecuación ($I_3^0(\dot{\phi}cos\theta + \dot{\Psi}) = L_z$)):

$$E_T = \frac{1}{2}\cancel{I_1^0\sin^2\theta}\frac{(L_{z'} - L_z cos\theta)^2}{\cancel{I_1^0\sin^2\theta}\, I_1^0\sin^2\theta} + \frac{1}{2}I_1^0\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{(L_z)^2}{I_3^0} + mglcos\theta$$

Como hay un miembro que es una constante, y queremos evaluar el potencial efectivo, la despreciaremos y definiremos otra constante que la contenga a ella y a la energía total, E':

$$E_T - \frac{1}{2}\frac{(L_z)^2}{I_3^0} = E' = \frac{1}{2}I_1^0\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{(L_{z'} - L_z cos\theta)^2}{I_1^0\sin^2\theta} + mglcos\theta$$

Vemos como hay una energía cinética efectiva, que es el primer sumando, y los dos siguientes sumandos, corresponderán con el potencial efectivo, que es una función únicamente del ángulo θ:

$$\left[\!\left[U_{efectivo}(\theta) = \frac{1}{2}\frac{(L_{z'} - L_z cos\theta)^2}{I_1^0\sin^2\theta} + mglcos\theta \right]\!\right]$$

A este resultado se le podría hacer un cambio de variable, separar variables, y se nos quedaría una integral con una cuadratura, para al final encontrarnos con una integral elíptica.

Aquí, lo que nos interesa es lo que le ocurre al trompo, como se comporta para distintas ocasiones, y a partir del potencial efectivo, vamos a ver que le pasaría para cada una de ellas:

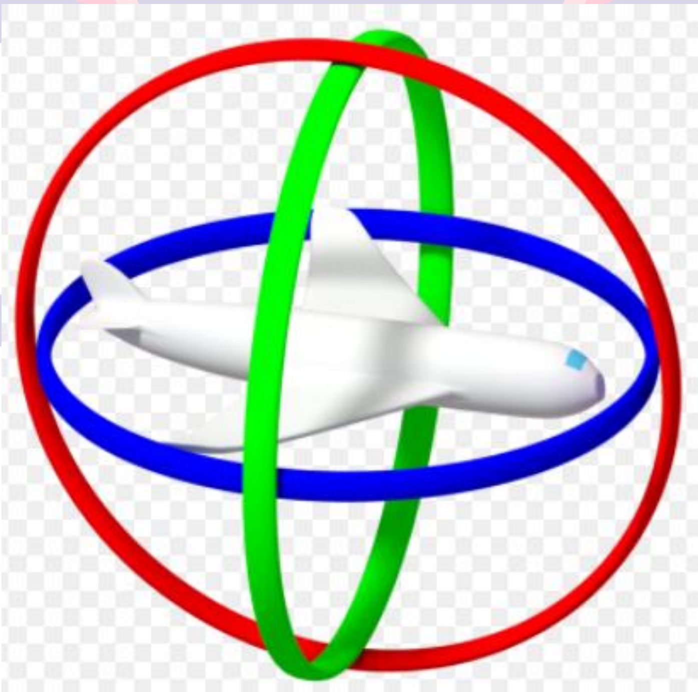
- El caso más sencillo y apetecible de hacer sería hacer que $L_z = L_{z'} = 0$. En este caso, el potencial sólo dependería del peso del trompo. Es decir, el trompo estaría quieto. Aunque todavía tenemos el ángulo θ en el potencial efectivo, que lo que nos quiere decir es que este trompo tendría distintas posiciones respecto del punto fijo de las que estarse quieto. Para empezar, en $\theta = 0$ tendríamos, visualizándolo, al trompo apoyado en el eje z' del del sistema fijo, donde el plano formado por x'y' del sistema fijo y plano xy del sistema del cuerpo coincidirían. Pero esta situación es la más inestable, porque en la realidad, ¡es imposible que un trompo se quede perfectamente perpendicular al suelo sin estar moviéndose! Por lo que, para este valor, el trompo tiene un equilibrio inestable, y se caería. Pero es que, lo más curioso, si el ángulo toma un valor $\theta = \pi$, será el potencial negativo, y el menor valor que puede tomar, donde presentará un equilibrio estable. Aquí, ¡el trompo estaría bajo el suelo, perpendicular al suelo!

Este comportamiento en estas circunstancias es la de un péndulo, que cuando está colgado del techo, que tiene su equilibrio estable en $\theta = \pi$. Esta situación, lógicamente, no se puede dar en un trompo, al menos en uno cotidiano, y por eso no tendrá tanta importancia como los que vamos a comentar ahora.

- Ahora supongamos que tenemos a $L_z cos\theta \neq L_{z'}$. En este caso, tenemos que el potencial efectivo tendrá dos valores de θ en los que divergirá positivamente. Por definición, el sen de un ángulo será nulo cuando valga 0 y π. Por lo que, para este caso, aparecen dos barreras centrífugas, una en $\theta = 0$ y otra en $\theta = \pi$. Entre ellas, sólo habrá un mínimo, que llevará asociada un potencial efectivo mínimo (U_0) que ocurre en θ_0, y que tendrá asociado un equilibrio estable.

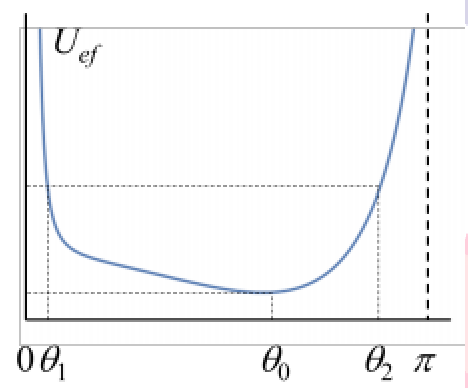
Este potencial, con un ángulo θ_0 asociado, no variará su valor, por lo que será constante, así como $\dot{\phi}$ y $\dot{\Psi}$.

- Curiosidad: si se cumple que $L_z = L_{z'} \neq 0$, quiere decir que el trompo irá girando verticalmente, ya que ponemos en paralelo dos de los tres ejes, donde desaparece la barrera centrífuga del 0, y se traba ese movimiento. A esto se le conoce como <u>gimbal lock</u>, y se daba, por ejemplo, en los giroscopios.



Para cualquier potencial que tomemos que sea mayor que θ_0, tendremos dos puntos de retorno (θ_- y θ_+), donde el sistema irá describiendo un ángulo $\theta \in [\theta_-, \theta_+]$. Es decir, que θ irá yendo desde θ_- hasta θ_+, pasando siempre por θ_0, y después volviendo. Esto implica que el trompo irá cabeceando mientras gira, movimiento al que se le denomina nutación, que dependerá de cómo va variando ϕ con el tiempo (ya que θ irá variando con el tiempo).

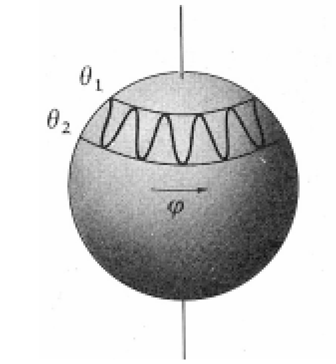
Todo lo mencionado hasta ahora se puede representar en la siguiente figura:



6. Velocidad angular de precesión.

Fijándonos ahora en $\dot{\phi}$ (al que también definiremos como velocidad angular de precesión Ω, $\Omega = \dot{\phi}$), éste puede tener también diversas situaciones.

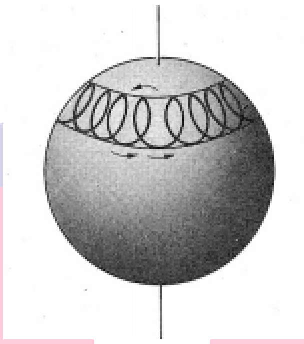
- En la primera de ellas, tenemos que $L_z < L_{z'}$, por lo que no hay ningún valor de ellas en la que se anulen, y la velocidad Ω (en la siguiente figura se le denomina al ángulo ϕ como φ) tendrá siempre el mismo signo y no se anulará, donde, si se combinan la nutación y la precesión, obtenemos el movimiento que se ilustra en la figura de abajo. Irá cabeceando en sentido antihorario:



- Tenemos un segundo movimiento, que corresponde con el que aparece cuando $L_z > L_{z'}$, en el que sí se puede anula Ω, por lo que habrá puntos en los que se anule. Podemos hallar cuando ocurre:

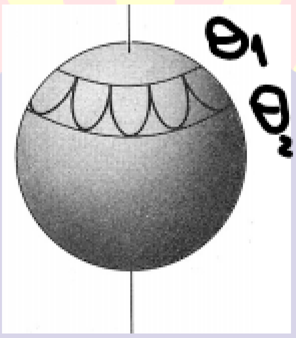
$$\Omega = \frac{L_{z'} - L_z cos\theta}{I_1^0 \sin^2\theta} = 0 \rightarrow L_{z'} - L_z cos\theta = 0 \rightarrow L_z cos\theta = L_{z'} \rightarrow \theta = \text{Arccos}\left(\frac{L_{z'}}{L_z}\right)$$

Además, el sentido de la precesión irá presentando rizos, debido a que θ tiene sus puntos de retorno. Por lo que θ irá variando su valor, y, por tanto, Ω irá tomando valores positivos y negativos. También cabeceará en sentido antihorario:



- Por último, se puede presentar que Ω se anule, pero no cambie su signo; es decir, que no se haga negativo, como en el caso anterior. Para que esto ocurra, también se debe anular $\dot{\theta}$.

Esto se corresponde con unas condiciones iniciales en las que el ángulo θ es constante, y será el menor valor que pueda tomar en un principio (lo llamaremos θ_1), y $\dot{\theta} = \Omega = 0$. Al soltar la peonza, que en un principio solo presentará una energía potencial, empezará a caer, hasta que alcance un ángulo θ_2, y después volverá a tomar el valor inicial θ_1. Durante el proceso, irá describiendo un movimiento de precesión. También cabeceará en sentido antihorario:



Vamos a profundizar en esto de lo de los puntos de retorno:

Supongamos unos valores de θ_- y θ_+ muy cercanos a θ, con un potencial U muy próximo al potencial efectivo mínimo U_0. Es decir, que U≅ U_0. Entonces también podremos suponer que $\theta \cong \theta_0$. Vamos a hallar la ecuación de movimiento para esta coordenada generalizada, que hasta ahora no había sido necesaria:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

Y sustituimos el lagrangiano que ya estaba en función de θ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I_1^0 (2\dot{\theta})\right) = \frac{d}{dt}\left(I_1^0 \dot{\theta}\right) = I_1^0 \ddot{\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\left[I_1^0 (\Omega^2 2 sin\theta \cos\theta) + I_3^0 2 (\Omega cos\theta + \dot{\Psi}) \Omega (-sin\theta)\right] - mlg(-sin\theta) =$$

$$= I_1^0 \Omega^2 sin\theta cos\theta - I_3^0 \left(\Omega cos\theta + \dot{\Psi}\right) \Omega sin\theta + mlg sin\theta$$

Recordando de la matriz de rotación de la velocidad angular, veíamos como $\omega_3 = \Omega cos\theta + \dot{\Psi}$. Por lo que vamos a sustituirlo arriba.

De paso, como dijimos que $\theta \cong \theta_0$, podemos suponer que θ va a ser constante, por lo que si primera y segunda derivada temporal serán nulas. Vamos a sustituir todo lo dicho:

$$I_1^0\ddot{\theta}_0 = 0 = I_1^0\Omega^2 sin\theta_0 cos\theta_0 - \omega_3 I_3^0 \Omega sin\theta_0 + mlgsin\theta_0$$
$$= sin\theta_0(I_1^0\Omega^2 cos\theta_0 - \omega_3 I_3^0\Omega + mlg)$$

Sea $sin\theta_0 \neq 0 \rightarrow\ I_1^0\Omega^2 cos\theta_0 - \omega_3 I_3^0\Omega + mlg = 0$

Para resolverla, podemos ver cómo estamos ante una ecuación de segundo grado. Vamos a definir a los siguientes parámetros, simplemente para simplificar a la hora de escribir, y para que sea una resolución más intuitiva:

$$a = I_1^0 cos\theta_0$$

$$b = \omega_3 I_3^0$$

$$c = mlg$$

Entonces tenemos:

$$a\Omega^2 - b\Omega + c = 0$$

Y la resolvemos:

$$\Omega = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2\left(1 - \frac{4ac}{b^2}\right)}}{2a} = \frac{b}{2a} \pm \frac{b}{2a}\left(1 - \frac{4ac}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Llegados a este punto, vamos a suponer una $\omega_3 \gg 0 \rightarrow b \gg 0$ (esto es lo que se llama un <u>trompo veloz</u>), y por lo tanto tendremos que $\frac{4ac}{b^2}$ tendrá un valor muy pequeño. Lo que tendremos que hacer ahí es un desarrollo de Taylor, aunque sólo nos quedaremos con el primer término, ya que los demás serán muy pequeños y los podremos despreciar (¡los resultados que obtengamos serán aproximaciones!):

$$\Omega = \frac{b}{2a} \pm \frac{b}{2a}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{4ac}{b^2}\right) = \frac{b}{2a} \pm \left(\frac{b}{2a} - \frac{\cancel{2ab}c}{\cancel{2ab^2}}\right) = \frac{b}{2a} \pm \left(\frac{b}{2a} - \frac{c}{b}\right)$$

De aquí, podemos obtener dos valores de Ω, en función del signo que tomemos:

- Para la raíz grande (es lo mismo que decir que si tomamos el signo positivo):

$$\Omega_+ = \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} - \frac{c}{b}$$

Como dijimos que b>>0→ $b \gg c \rightarrow \frac{c}{b} \cong 0$

$$\Omega_+ = \frac{2b}{2a} - 0 = \frac{b}{a}$$

Deshagamos el cambio:

$$\boxed{\Omega_+ = \frac{\omega_3 I_3^0}{I_1^0 cos\theta_0}}$$

Para este resultado, tenemos una **precesión rápida** (ya que el numerador será mucho mayor que el denominador, porque $\omega_3 \gg 0$), donde es como un trompo libre de fuerzas, que podría existir sin gravedad.

Este resultado también lo podríamos haber obtenido a partir de derivar del momento resultante $\vec{N} = \overrightarrow{\Omega_+} \times \overrightarrow{\omega_3}$.

- Para la raíz chica (el signo negativo):

$$\Omega_- = \frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} + \frac{c}{b} = \frac{c}{b}$$

Deshaciendo el cambio:

$$\left[\!\left[\Omega_- = \frac{mlg}{\omega_3 I_3^0} \right]\!\right]$$

Y para este otro resultado, obtenemos lo que se llama **precesión lenta** (en este caso, el denominador es mayor que el numerador), y se debe al torque gravitatorio que presenta el trompo. Normalmente, cuando pongamos a girar un trompo, aparece esta precesión, y, por supuesto, la nutación.

Este fenómeno también le ocurre a la Tierra, que, aunque no esté apoyado (por lo que los cálculos se harían respecto del centro de masas). Debido a que la Tierra está achatada por los polos, y está inclinada, habrá zonas de la superficie que presenten distinto potencial ejercida por el Sol, e incluso por la Luna. Teniendo en cuenta esto mencionado, la precesión lenta, la nutación astronómica, y con el bamboleo de Chandler (variación del eje de rotación de la Tierra), que tarda en realizarlo unos 26000 años.

Ambas precesiones son válidas para unos valores de $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$ y $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$, donde la precesión rápida tendrá el mismo sentido en ambos casos, pero en la precesión lenta ocurrirán en distintos sentidos.

7. Conclusión.

Ha sido un camino complicado, pero, al final, mucho más sencillo de lo que se podría haber esperado. Comenzamos con una probabilidad de que se nos presentaran seis grados de libertad, aunque, gracias al punto de apoyo, se nos simplifico en tres, y encima, debido a que dos de los tres ángulos de Euler eran cíclicos, se nos acabó quedando todo en función de una única coordenada: θ.

Al llegar al caso mono dimensional, una cosa bastante frecuente que se suele hacer (que nosotros hicimos también), es evaluar el potencial efectivo. De aquí se sacaron situaciones improbables, como la del trompo que se comporta como un péndulo, aunque también obtuvimos todo esto de un potencial efectivo mínimo, y que, a partir de este valor, cualquier punto dentro del intervalo definido tendría dos puntos de retorno.

Estuvimos analizando la velocidad angular de precesión Ω, a partir, en un principio, del resultado obtenido a partir de su propia ecuación de movimiento, y, después, a partir de la ecuación de movimiento de θ. Entre ambas, obtuvimos bastante cosas de la precesión, de como puede ir variando, de los tipos de hay, de que pasaría si se anulase…

Finalmente, concluir que hemos analizado a fondo el movimiento del trompo, de una manera sencilla, y bastante efectiva, y todo gracias a nuestro amigo Lagrange, que nos lo resolvió en su momento, dejándonos hoy en día una de las aplicaciones más complicadas de la dinámica del cuerpo rígido.

8. Bibliografía.

https://drive.google.com/file/d/0B5I-iWEL3AHOZ0pxODNZRHVhOUE/view

http://jacobi.fis.ucm.es/artemio/Notas%20de%20curso/MC.pdf

https://moodle.uco.es/m2021/pluginfile.php/275948/mod_resource/content/1/mo1-apuntes.pdf

Jerry B. Marion, Dinámica clásica de las partículas y sistemas.

H. Goldstein, Mecánica Clásica.

Arturo Moncho Jordá, 101 Problemas de mecánica teórica.

9. Mensaje.

Para finalizar, quiero comentarle que le quería agradecer por habernos enseñado todo esto de la mecánica, una asignatura tan compleja, y haber conseguido que, aunque haya muchas cosas que me parezcan difíciles, me esté empezando a gustar esto de la física de una manera que nunca pensaría, en un sentido más riguroso, y con muchos tecnicismos.

A este trabajo, es cierto que le he dedicado muchas horas, incluso antes de haber dado la teoría necesaria del Tema 6 (aunque después retoqué con algunas cosas que usted estuvo comentando en las últimas clases), y aunque saque mala nota, en este trabajo, o, en el examen, estoy feliz de haber podido entender algo como esto.

Muchas gracias por estos meses, y aunque, sé que no me conozca, debido a las circunstancias en la que estamos, le deseo mucha salud.

Un saludo.