

Difracción de electrones

José Manuel Rodríguez Manjón
Alejandro José Florido Tomé

08/11/2022

1. Objetivo

Se pretende observar experimentalmente la difracción de electrones emitidos en el efecto termoiónico por una estructura cristalina. Así, pueden obtenerse magnitudes capaces de describir correctamente la estructura dispuesta del grafito.

2. Marco Teórico

Para la obtención de una descripción correcta de las estructuras cristalinas, es común usar leyes basadas en la óptica geométrica bajo ciertas suposiciones. Así, partiendo de la microscopía, es posible obtener información sobre la disposición espacial de una red atómica gracias a los patrones de difracción resultantes de incidir con radiación comparable en longitud de onda a las dimensiones atómicas.

En particular, durante la experiencia se presupone que el cristal es una red tridimensional de difracción para los rayos X incidentes. Para establecer una relación entre el campo eléctrico, suministrado para acelerar las partículas, y la longitud de onda para la radiación incidente se recurre a la hipótesis de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}} \quad (2.1)$$

Debido a la carga de los electrones, estos interactúan muy fuertemente con los átomos del sólido, con lo que el haz solo penetra unos centenas de amstrongs, haciéndolos muy útiles para estudiar sólidos dispuestos en capas delgadas como el grafito.

La muestra cristalina da lugar a difracciones e interferencias de haces electrónicos coherentes. Con ello, existirán ciertos ángulos de desviación para los cuales la intensidad será máxima, con reflexiones elásticas. La condición de Bragg para la interferencia constructiva de haces reflejados, teniendo en cuenta una distancia interplanar promedio d es:

$$n\lambda = 2d\sin\theta \quad (2.2)$$

Con θ la mitad del ángulo dispersado observado.

Para nuestra experiencia, se tomarán ángulos pequeños, debido al rango

de energías usados en el laboratorio.

3. Metodología

El filamento dispuesto en el interior del tubo de difracción de electrones se calienta, permitiendo la expulsión del haz coherente por efecto termoiónico. El imán acoplado al dispositivo permite direccionar el haz hacia una muestra de grafito policristalino pulverizado que difracta los electrones. Se observan patrones de anillos de difracción que difieren en tamaño para cada valor de tensión aplicada (entre 2.5 y

5. kV). Estos fueron observados sobre una pantalla luminiscente que permite esclarecer la medida de sus radios correspondientes.

Así pues, la distancia entre la muestra y la pantalla observada se establece en 13,5cm. El tamaño del disco fluorescente es, según la bibliografía: $(89,5 \pm 0,1)mm$.

4. Resultados y Cuestiones

4.1. R.1.

Según las consideraciones anteriores, se trabaja en zona paraxial. Así, la función seno es aproximable a primer orden dominante por el valor del argumento. , y fijándonos en la imagen 1:

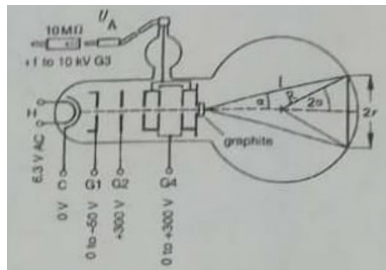


Figura 1.

Conque podemos considerar que el ángulo de desviación es el doble que el de Bragg, por lo que:

$$\sin(2\alpha) = \frac{r}{R} \approx 2\alpha = 2 \cdot 2\theta \quad (4.1)$$

Estableciéndose la siguiente relación:

$$\theta \approx \frac{r}{4R} \quad (4.2)$$

En el Anexo se explica como se pueden hallar los radios en centímetros, y teniendo en cuenta que $R=(4,475 \pm 0,001)$ cm, podemos hallar los ángulos de Bragg (valores localizados en la última columna de la tabla 1).

4.2. C.1.

Ahora, procedamos a encontrar una relación entre el valor medio de los radios de los anillos de interferencia, $\langle r \rangle = r$, y la longitud de onda λ .

Partimos de la condición de interferencia constructiva (ecuación 2.2) tal que, en la aproximación paraxial, $\sin\theta \approx tg\theta$, que se relaciona con el ra-

$r_{in} (\pm 0,01)$ mm	$r_{out} (\pm 0,01)$ mm	$\langle r \rangle (\pm 0,01)$ mm	$V (\pm 0,01)$ kV	θ °
13,100±0,003	23,000±0,006	18,000±0,005	4,75	5,769±0,003
12,900±0,003	22,400±0,006	17,600±0,004	4,59	5,640±0,003
13,000±0,003	22,900±0,006	18,000±0,005	4,39	5,747±0,003
13,500±0,003	23,800±0,006	18,600±0,005	4,20	5,968±0,003
14,600±0,004	24,100±0,006	19,400±0,005	4,01	6,202±0,003
14,800±0,004	25,900±0,006	20,400±0,005	3,99	6,525±0,003
14,800±0,004	25,800±0,006	20,300±0,005	3,80	6,501±0,003
14,700±0,004	25,800±0,006	20,300±0,005	3,59	6,488±0,004
15,300±0,004	26,100±0,006	20,700±0,005	3,39	6,614±0,004
15,700±0,004	25,700±0,006	20,700±0,005	3,21	6,627±0,004
15,000±0,004	25,100±0,006	22,000±0,005	3,00	7,042±0,004
16,400±0,004	30,500±0,007	23,400±0,006	2,81	7,505±0,004
16,700±0,004	30,600±0,007	23,700±0,006	2,60	7,577±0,004
16,600±0,004	33,200±0,008	24,900±0,006	2,42	7,982±0,004

Tabla 1: Radios internos, externos y la media de los anillos de interferencia, que tenían asociado un valor de la tensión V , y con ellos calculamos los ángulos de Bragg.

dio, si nos fijamos en la imagen 1, con:

$$tg\alpha = \frac{r}{L} = tg(2\theta) \approx 2\theta \quad (4.3)$$

Entonces:

$$\theta \approx \frac{r}{2L} \quad (4.4)$$

Aproximando paraxialmente también la ecuación 2.2, tendremos que $2d\theta \approx r/L = n\lambda$, y despejando, obtenemos la relación que buscábamos:

$$r = n \frac{L}{d} \lambda \quad (4.5)$$

Con las tablas 1 y 2, representemos el radio frente a la longitud de onda:

Con esta última ecuación, podríamos hacer una regresión lineal si calculamos las longitudes de ondas con la ecuación 2.1. Tomando $h = 6,636 \cdot 10^{-34} J \cdot s$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$, $m = 9,11 \cdot 10^{-31} kg$, tenemos los siguientes valores de las longitudes de onda, asociadas a distintos valores de la tensión:

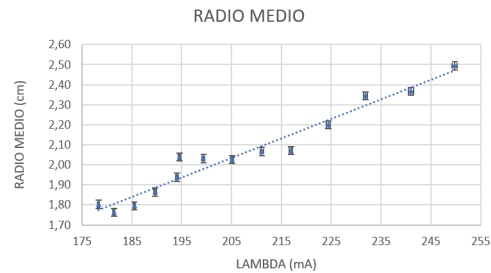


Figura 2.

V ($\pm 0,01$) kV	λ (mÅ)	$\Delta\lambda$ (mÅ)
4,75	178,33	0,19
4,59	181,41	0,20
4,39	185,50	0,21
4,20	189,65	0,23
4,01	194,09	0,24
3,99	194,57	0,24
3,80	199,4	0,3
3,59	205,1	0,3
3,39	211,1	0,4
3,21	216,9	0,4
3,00	224,4	0,4
2,81	231,9	0,5
2,60	241,0	0,5
2,42	249,8	0,6

Tabla 2: Valores de la longitud de onda y su respectivo error asociado a cada valor de la tensión.

Cuya pendiente tiene un valor de:

$$m = (0,0098 \pm 0,0007) \frac{cm}{m\text{Å}} \quad (4.6)$$

Podríamos hacer lo mismo por separado para los radios internos y externos de los anillos:

Por un lado, para los anillos internos:

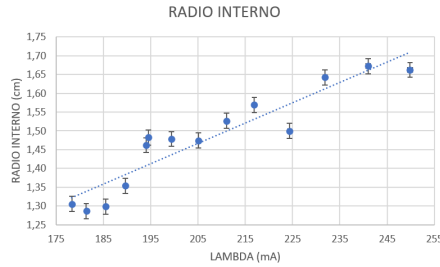


Figura 3.

Con pendiente:

$$m_1 = (0,0054 \pm 0,0006) \frac{cm}{m\text{Å}} \quad (4.7)$$

Por otro lado, para los externos:

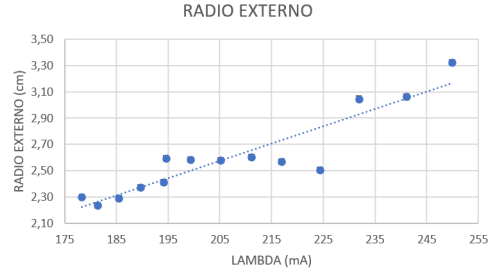


Figura 4.

Y su pendiente:

$$m_2 = (0,0131 \pm 0,0017) \frac{cm}{m\text{Å}} \quad (4.8)$$

Podemos ver en las tres gráficas que hay bastantes puntos distanciados de la línea de regresión (sobre todo para los radios externos, que tiene un valor de R^2 de 0,8735), pero que sigue, a grandes rasgos, esa tendencia lineal.

4.3. R.2.

Con los valores de las pendientes, si tomamos $n=1$ y $L=13,5$ cm (es la dis-

tancia entre la lámina de grafito y la pantalla fluorescente dada en el protocolo), podemos, con ayuda de la ecuación 4.5 (cuya pendiente es nL/d), obtener los distintos valores de d :

- Para el radio medio:
 $d = (1,38 \pm 0,10)\text{Å}$
- Para el radio interno:
 $d_{in} = (2,5 \pm 0,3)\text{Å}$
- Para el radio externo:
 $d_{out} = (1,03 \pm 0,14)\text{Å}$

Según el guión de prácticas, deberíamos de obtener unos valores de $1,23\text{ Å}$ y $2,13\text{ Å}$; el radio externo está asociado al primer valor y, de hecho, coinciden gracias a las barras de error (error relativo del 16,26%), pero el radio externo, asociado al segundo valor, se pa-

recen pero no llegan a coincidir por poco (error relativo del 17,4 %). De todas maneras, con ambos intuimos que vamos por buen camino, y que nuestros datos no están muy descarrilados de los teóricos.

4.4. R.3.

También podríamos proponernos que valor de la constante de Planck obtenemos con la d conocida. Para ello, nos ayudaremos de la siguiente ecuación:

$$\langle r \rangle = n \frac{L}{d} \frac{h}{\sqrt{2meV}} \quad (4.9)$$

Representando en una misma tabla los valores de r asociados a cada valor de $V^{-1/2}$:

$\langle r \rangle (\pm 0,01)\text{ cm}$	$V^{-1/2} (\pm 1)10^4\ 1/V^{-1/2}$
1,80	145
1,76	148
1,80	151
1,86	154
1,94	158
2,04	158
2,03	162
2,03	167
2,07	172
2,07	177
2,20	183
2,34	189
2,37	196
2,49	203

Tabla 3: Valor medio de r asociado a $1/V^{-1/2}$.

Con dichos valores, estamos en posición de hacer la regresión lineal:

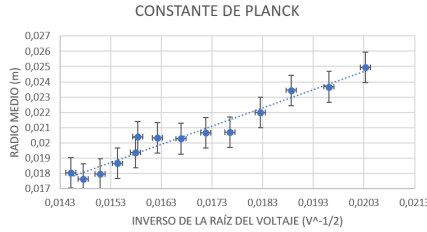


Figura 5.

Cuya pendiente es:

$$m' = (1,20 \pm 0,08) \frac{m}{V^{1/2}} \quad (4.10)$$

Igualando este valor a la pendiente $nLh/(d\sqrt{2me})$, con $d=(1,38 \pm 0,10)\text{\AA}$, podemos despejar el valor de la constante de Planck, obteniendo un valor de:

$$h = (6,6 \pm 1,0) \cdot 10^{-34} J \cdot s \quad (4.11)$$

Dicho valor tiene un error asociado bastante grande, cosa lógica porque, tal y como se ha visto durante toda la práctica, se nos han ido propagando unos errores bastante importantes, y más si tenemos en cuenta que hay un error humano en esta práctica bastante significativa porque el medir los radios con Paint fue algo inexacto. A pesar de todo ello, nuestro valor se diferencia del valor teórico un 0,8%, cosa que no está nada mal. Nos sale del mismo orden y muy parecido, cosa complicada con una constante con unas dimensiones tan pequeñas.

Para hacer la conversión de píxeles

4.5. C.2.

La estructura cristalina del grafito se clasifica como una red hexagonal con base de cuatro átomos. Al observar las moléculas del material aparecen planos estructurados de forma hexagonal intercalados a una distancia característica sobre la unidad del Amstrong. Estos se intercalan, de tal forma que entre dos planos separados una distancia doble a la interplanar no existe un paralelismo completo, estando desplazada la capa intermedia entre éstos.

Si elegimos una tríada de hexágonos para dos planos paralelos, la capa intermedia queda desplazada de tal forma que se observa un hexágono en el centro de los tres y otros dos átomos más unidos a las aristas de dos de las celdas hexagonales. Así, puede definirse la molécula con átomos en las posiciones $(0,0,0)(2a/3, a/3, 0)(2a/3, a/3, c/2)(a/3, 2a/3, c/2)$, donde a es $\sqrt{3}$ veces el lado de los hexágonos y c la distancia entre planos antes mencionada.

5. Anexo

En el laboratorio, le echamos fotos a los anillos de interferencia, para medir con Paint los radios internos y externos, con la que anotábamos el número de píxeles (px). Con ello, sabiendo que el radio total de la pantalla luminiscente es de $R=(4,475 \pm 0,001)$ cm, medimos lo siguiente:

a centímetros debemos hacer:

$$cm(in/out) = \frac{px(in/put)}{px_{tot}} \cdot 4,475 \quad (5.1)$$

px totales (± 1)	px internos (± 1)	px externos (± 1)
576	168	296
640	184	320
648	188	332
648	196	344
649	212	350
652	216	378
672	222	388
680	224	392
680	232	396
696	244	400
728	244	408
752	276	512
760	284	520
786	292	584

Tabla 4: Píxeles totales, internos y externos de los radios de interferencia.

Con esto, podemos hallar los radios en centímetros, que es lo que se presenta en la tabla 1.

$$\Delta d = d \left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta m}{m} \right) \quad (5.3)$$

Las fórmulas de los errores de esta práctica son las siguientes:

$$\Delta h = h \left(\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta L}{L} \right) \quad (5.4)$$

$$\Delta \theta = \theta \left(\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta R}{R} \right) \quad (5.2)$$

$$\Delta r = \frac{px}{px_{tot}} \cdot 0,001 \text{ cm} \quad (5.5)$$